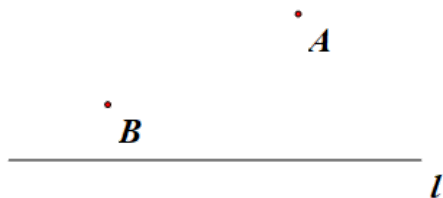


第3讲 二次函数之将军饮马、胡不归问题

一、将军饮马问题

1. 和最小问题

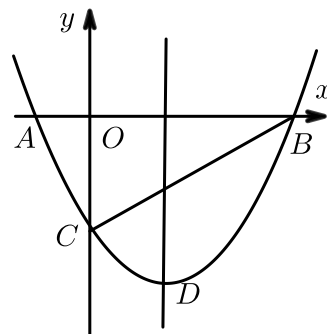
如图，在 l 上找一点 P ，使 $PA + PB$ 最小。



🧐 举个“栗”子

栗子1

1. 如图，抛物线 $y = x^2 + bx - 3$ 与 x 轴交于 A, B 两点，与 y 轴交于 C 点，且 $A(-1, 0)$ 。



(1) 求抛物线的解析式及顶点 D 的坐标。

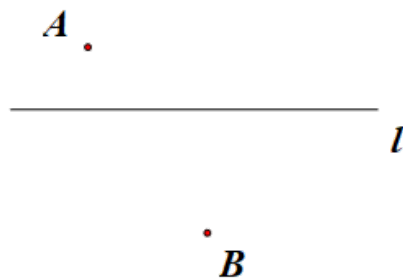
(2) 点 $M(m, 0)$ 是 x 轴上的一个动点，当 $MC + MD$ 的值最小时，求 m 的值。

2. 差最值问题

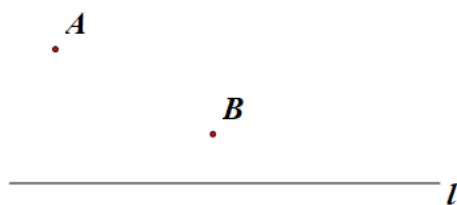
- 1、如图，在 l 上找一点 P ，使 $|PA - PB|$ 最小.



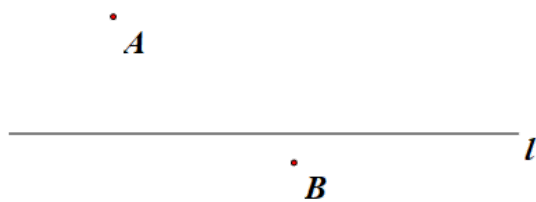
- 2、如图，在 l 上找一点 P ，使 $|PA - PB|$ 最小.



- 3、如图，在 l 上找一点 P ，使 $|PA - PB|$ 最大.

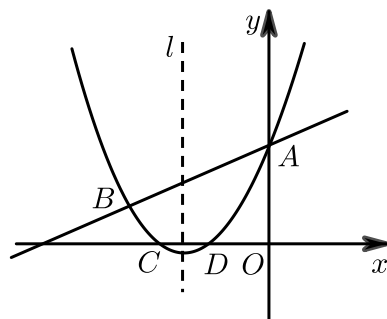


- 4、如图，在 l 上找一点 P ，使 $|PA - PB|$ 最大.



栗子2

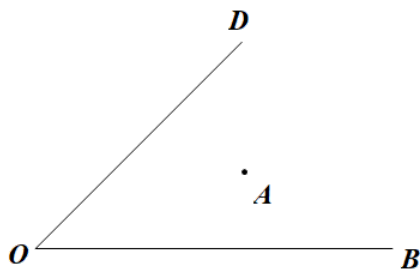
2. 如图，抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与直线 $y = \frac{1}{2}x + 3$ 交于 A, B 两点，点 A 在 y 轴上，抛物线交 x 轴于 C, D 两点，已知 $C(-3, 0)$ 。



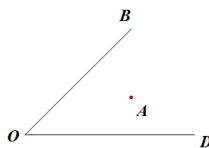
- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 在抛物线对称轴 l 上找一点 M ，使 $|MB - MD|$ 的值最大，请求出点 M 的坐标及这个最大值。

3. 一定两动类

1. 如图，点 A 在锐角 $\angle DOB$ 的内部，在 OD 边上求作一点 P ，在 OB 边上求作一点 Q ，使 $\triangle PAQ$ 的周长最小（或者使得 $PA + QA$ 最小）。

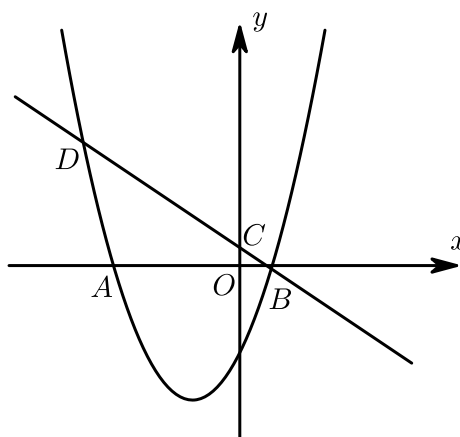


- 2、如图，点 A 在锐角 $\angle DOB$ 的内部，在 OD 边上求作一点 P ，在 OB 边上求作一点 Q ，使得 $PQ + PA$ 最小。

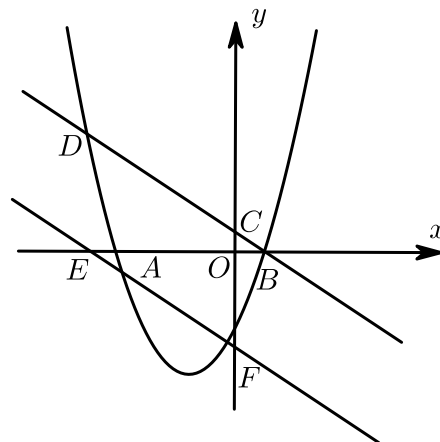


栗子3

3. 如图，抛物线 $y = ax^2 + 2x + c$ 与 x 轴交于 $A(-4, 0)$ ， $B(1, 0)$ 两点，过点 B 的直线 $y = kx + \frac{2}{3}$ 分别与 y 轴及抛物线交于点 C ， D 。

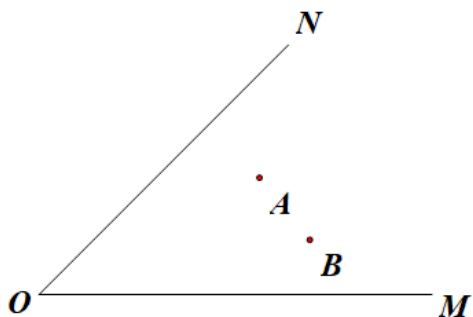


- (1) 求直线和抛物线的表达式。
- (2) 如图，将直线 BD 沿 y 轴向下平移 4 个单位后，与 x 轴， y 轴分别交于 E ， F 两点，在抛物线的对称轴上是否存在点 M ，在直线 EF 上是否存在点 N ，使 $DM + MN$ 的值最小？若存在，求出其最小值及点 M ， N 的坐标；若不存在，请说明理由。



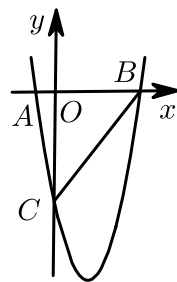
4. 两定两动类

如图，点 A 、 B 在锐角 $\angle MON$ 的内部，在 ON 边上求作一点 P ，在 OM 边上求作一点 Q ，使四边形 $ABQP$ 周长最小（或者使得 $PA + PQ + QB$ 最小）。



栗子4

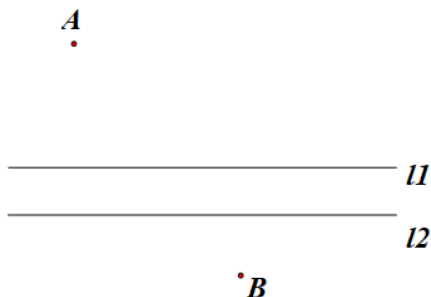
4. 如图，在平面直角坐标系中，已知抛物线 $y = ax^2 + bx - 5$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ ， $B(5, 0)$ ，与 y 轴交于点 C 。



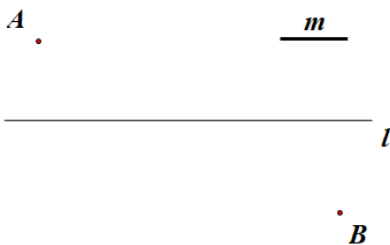
- (1) 抛物线的函数表达式为 _____。
- (2) 若点 K 为抛物线的顶点，点 $M(4, m)$ 是该抛物线上的一点，在 x 轴， y 轴上分别找点 P ， Q ，使四边形 $PQKM$ 的周长最小，求出点 P ， Q 的坐标。

5. 含定长类

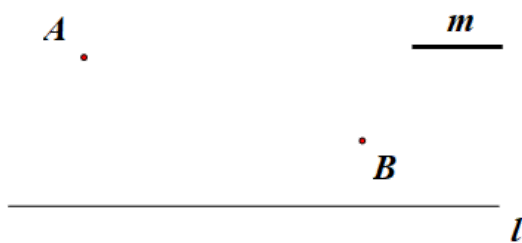
1、如图，在一组平行线 l_1 、 l_2 两侧各有一点 A 、 B ，在 l_1 、 l_2 间找一条线段 MN ，使 $MN \perp l_1$ ，并且使得 $AM + MN + NB$ 之和最短。



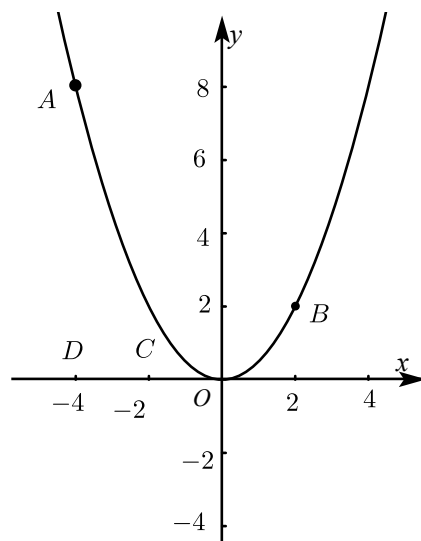
2、如图，直线 l 外有两点 A 、 B ，有一定长线段 m ，在直线上找到点 P 、 Q ，使得 PQ 间的距离等于定长 m ，且使得 $AP + PQ + QB$ 最小。



3、如图，直线 l 外有两点 A 、 B ，有一定长线段 m ，在直线上找到点 P 、 Q ，使得 PQ 间的距离等于定长 m ，且使得 $AP + PQ + QB$ 最小（或者使得四边形 $APQB$ 周长最小）。

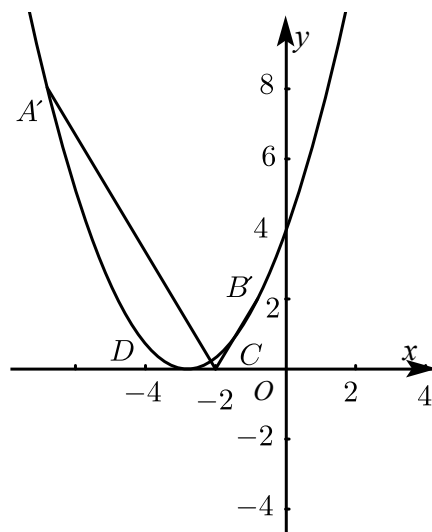


5. 如图，已知点 $A(-4, 8)$ 和点 $B(2, n)$ 在抛物线 $y = ax^2$ 上．．

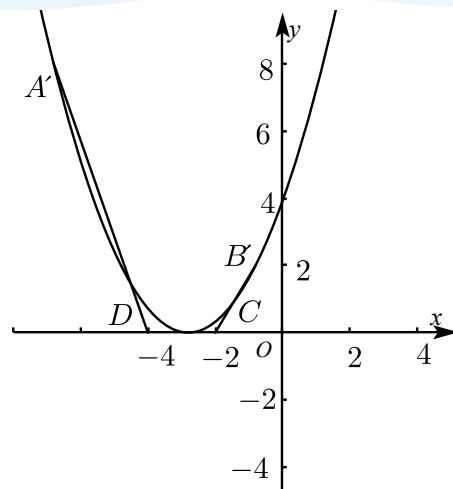


- (1) 求 a 的值及点 B 关于 x 轴对称点 P 的坐标，并在 x 轴上找一点 Q ，使得 $AQ + QB$ 最短，求出点 Q 的坐标．
- (2) 平移抛物线 $y = ax^2$ ，记平移后点 A 的对应点为 A' ，点 B 的对应点为 B' ，点 $C(-2, 0)$ 和点 $D(-4, 0)$ 是 x 轴上的两个定点．

① 当抛物线向左平移到某个位置时， $A'C + CB'$ 最短，求此时抛物线的函数解析式．



- ② 当抛物线向左或向右平移时，是否存在某个位置，使四边形 $A'B'CD$ 的周长最短？若存在，求出此时抛物线的函数解析式；若不存在，请说明理由．



独步天下1

6. 已知抛物线 $y = ax^2 - 2ax + c$ (a, c 为常数, $a \neq 0$) 经过点 $C(0, -1)$, 顶点为 D .

(1) 当 $a = 1$ 时, 求该抛物线的顶点坐标.

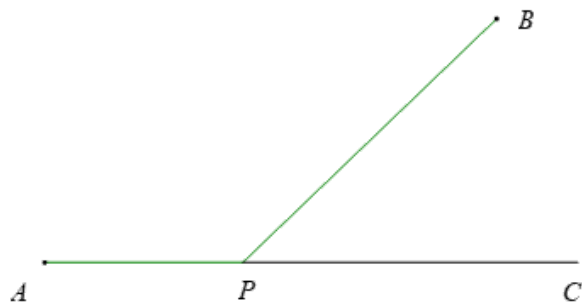
(2) 当 $a > 0$ 时, 点 $E(0, 1 + a)$, 若 $DE = 2\sqrt{2}DC$, 求该抛物线的解析式.

(3) 当 $a < -1$ 时, 点 $F(0, 1 - a)$, 过点 C 作直线 l 平行于 x 轴, $M(m, 0)$ 是 x 轴上的动点,

$N(m + 3, -1)$ 是直线 l 上的动点. 当 a 为何值时, $FM + DN$ 的最小值为 $2\sqrt{10}$, 并求此时点 M, N 的坐标.

二、胡不归问题

□思考：在直线 AC 上有一个动点 P ，点 B 是直线外一点，求 $\frac{1}{2}AP + PB$ 的最小值．



！特点：

①两定一动．____、____是两个定点，点____是一个动点．

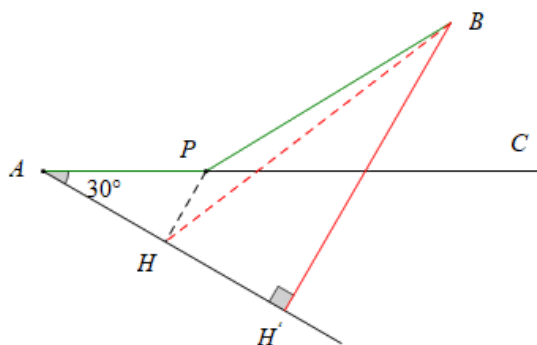
②动点____在____上运动．

【思路点拨】

我们知道求 $AP + PB$ 的最小值可以直接利用两点之间线段最短，但是有系数 $\frac{1}{2}$ 存在，就不能直接用两点之间的线段来表示最小值，那么如何解决这个问题呢？

可以利用转化的思想，将 $\frac{1}{2}AP$ 转化为一条系数为1的线段，就可以解决这个问题．由 $\frac{1}{2}AP$ 可以想到含____角的直角三角形，于是可以通过_____．

如图构造 $\angle CAH = \underline{\hspace{2cm}}$ ，过点 P 作 $PH \perp AH$ 于点 H ，在直角三角形中 30° 角所对的直角边等于斜边的一半，则 $\frac{1}{2}AP = \underline{\hspace{2cm}}$ ，所以 $\frac{1}{2}AP + PB = \underline{\hspace{2cm}}$ ，因为 P 点是动点，所以点 H 也是动点，因此当_____时， $\frac{1}{2}AP + PB$ 最小，即_____．



8. 已知，抛物线 $C: y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$) 的顶点为 M ，与 y 轴交于点 C 。

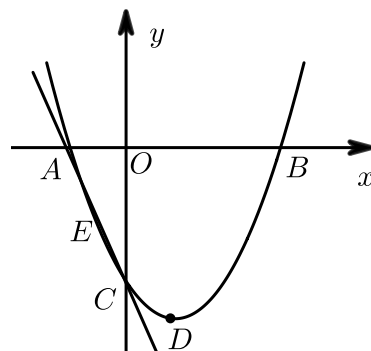
(1) 当 $a = -1$ 时。

① 抛物线 C 经过点 $C(0, 3)$ 和 $(4, -5)$ ，求抛物线 C 的顶点坐标。

② 抛物线 C_1 与抛物线 C 关于直线 $x = 3$ 对称，若点 $(1, 0)$ ，点 $(2, 5)$ 在抛物线 C_1 上，求抛物线 C 的解析式。

(2) 开口向下的抛物线 C 经过点 $A(-2, 0)$ ， $C(0, 2\sqrt{3})$ ，对称轴在 y 轴右侧，交 x 轴于点 Q ，点 P 为 y 轴上一动点，当 $PQ + \frac{1}{2}CP$ 的最小值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 时，求 a, b 的值。

9. 如图，抛物线 $y = ax^2 - 2ax + c$ 的图象经过点 $C(0, -2)$ ，顶点 D 的坐标为 $\left(1, -\frac{8}{3}\right)$ ，与 x 轴交于 A 、 B 两点。



- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 点 $F(0, y)$ 是 y 轴上一动点，当 y 为何值时， $\frac{\sqrt{5}}{5}FC + BF$ 的值最小。并求出这个最小值。

10. 已知抛物线 $y = x^2 - bx + c$ (b, c 为常数, $b > 0$) 经过点 $A(-1, 0)$, 点 $M(m, 0)$ 是 x 轴正半轴上的点.

(1) 当 $b = 2$ 时, 求抛物线的顶点坐标.

(2) 点 $D(b, y_D)$ 在抛物线上, 当 $AM = AD$, $m = 5$ 时, 求 b 的值.

(3) 点 $Q\left(b + \frac{1}{2}, y_Q\right)$ 在抛物线上, 当 $\sqrt{2}AM + 2QM$ 的最小值为 $\frac{33\sqrt{2}}{4}$ 时, 求 b 的值.